定積分の定義と区分求積法

定積分の定義式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)$$

定義式の解説

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとき，

閉区間 $[a,b]$ を n 等分すると区間幅 $=\dfrac{b-a}{n}$

また，区間の区切りの点を $x_k = a + \dfrac{b-a}{n}\cdot k$ （$0 \le k \le n-1$ または $1 \le k \le n$）と定めると，

区間幅 $\dfrac{b-a}{n}$ と $f(x_k)$ の積 n 個の和は n が大きくなるに従い，$\int_a^b f(x)dx$ の値により近くなる。

つまり，n が十分大きいと，

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ かつ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ が成り立つ。

よって，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)$$

となる。

尚，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}$ は dx，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Sigma$ は $\int$ にあたる。

区分求積法

$f(x) \ge 0$ のとき，$y = f(x)$，2 直線 $x = a$，$x = b$ および x 軸で囲まれた部分の面積を

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)$$

または，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)$$

で求める方法を区分求積法という。

無限級数から定積分へ

定積分から無限級数への逆を辿る無難な処理の流れ

$\dfrac{k}{n}$ と $\dfrac{1}{n}$ の式形 $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ つくり，$x_k=\dfrac{k}{n}$ とし k の範囲から積分区間を求め，

それが $[a,b]$ ならば $\int_a^b f(x)dx$ とすればよい場合が多いが，そうはいかない場合もあるので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn}^{qn}a_k&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn}^{qn}\left(\frac{qn-pn+1}{qn-pn+1}\right)^m a_k\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn}^{qn}\left\{\frac{1}{qn-pn+1}f(x_k)\cdot g(n)\right\}\end{aligned}\quad\text{解説}$$

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{qn-pn+1}\sum_{k\sim pn}^{qn}f(x_k)\cdot\lim_{n\to\infty}g(n)\\&=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\lim_{n\to\infty}g(n)\end{aligned}$$

解説

$\boldsymbol{\left(\dfrac{qn-pn+1}{qn-pn+1}\right)^m a_k}$ について

定積分の定義式の $x_k=a+\dfrac{b-a}{n}$ の n は，$\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$ の項数 n を表す。

x_k をつくるに当たり，$\sum_{k=pn}^{qn}a_k$ の項数が $qn-pn+1$ だから，

a_k の k^l の項を含む式に k の次数と同じ次数の $\left(\dfrac{1}{qn-pn+1}\right)^l$ を掛け，

$\left(\dfrac{k}{qn-pn+1}\right)^l$，つまり $\left(\dfrac{k}{\text{項数}}\right)^l$ の項をつくる。

たとえば，項数が n であれば $\left(\dfrac{k}{n}\right)^l$，$2n$ であれば $\left(\dfrac{k}{2n}\right)^l$ といった具合に。

また，定積分の定義式の区間幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の n も $\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$ の項数だから，

この場合は区間幅 $\dfrac{1}{qn-pn+1}$ をつくる。

たとえば，項数が n であれば $\dfrac{1}{n}$，$2n$ であれば $\dfrac{1}{2n}$ といった具合に。

これらをつくるための前処理として，$\left(\dfrac{qn-pn+1}{qn-pn+1}\right)^m a_k$ としたのである。

尚，$g(n)$ は，その際生じた副産物である。

x_k について

x_k の設定の仕方は比較的自由で，k についての 1 次式の部分を x_k とすればよい。

たとえば，$\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^l$ ならば，$x_k=1+\dfrac{k}{n}$ としてもよいし，$x_k=\dfrac{k}{n}$ としてもよい。

とくに慎重になる必要はない。

設定に応じて関数 $f(x_k)$ と積分区間が平行移動するだけで問題ない。

尚，積分区間 β と α は $x_{pn}\leq x_k\leq x_{qn}$ より，$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}x_{pn}$，$\beta=\lim\limits_{n\to\infty}x_{qn}$ である。

補足

項数を $\dfrac{1}{qn-pn}$ としたいのなら，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn}^{qn}a_k &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=pn+1}^{qn}a_k+a_{pn}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn+1}^{qn}a_k+\lim_{n\to\infty}a_{pn}
\end{aligned}
$$

と変形し，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=pn+1}^{qn}a_k$ を扱えばよい。

例題　無限級数から定積分へ

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}\right)$ を求めよ。　（東京理科大　理）

解法１　：項数を変えずそのまま解く。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{\frac{n+1}{2n-n+1}}{\boxed{\frac{n+k}{2n-n+1}}}$$

標的は k

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{\frac{n+1}{n+1}}{\frac{n+k}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\frac{n+k}{n+1}}$$

$\frac{n+1}{n+k}$ から直接 $\frac{1}{\frac{n+k}{n+1}}$ が得られるが，

解説に忠実に処理した。

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\frac{n+1+(k-1)}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n}\boxed{\frac{n+1}{n+1}}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}$$

区間幅 $\frac{1}{n+1}$ をつくるのが目的

$$=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}\right)$$

$$=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n+1}}$$

ここで$\dfrac{k-1}{n+1}=x_k$とおくと，$\dfrac{n-1}{n+1}\leq x_k\dfrac{2n-1}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}1\leq x\leq 2$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}\right)&=\int_1^2\frac{dx}{1+x}\\&=\left[\log|1+x|\right]_1^2\\&=\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

解法 2：項数を $\boldsymbol{n}$ にして解く。

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}&=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n+1}{n+k}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+k}{n}}+\frac{n+1}{2n^2}\\&=\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\frac{n+k}{n}}+\frac{n+1}{2n^2}\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}+\frac{n+1}{2n^2}\right)\end{aligned}$$

どこでΣの項数を n にしてもよい。
わかりやすさの目的で，
ここでΣの項数を n にした。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}+\frac{n+1}{2n^2}\right)\right\}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}+\frac{n+1}{2n^2}\right)\\&=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

ここで$\dfrac{k}{n}=x_k$とおくと，$\dfrac{n}{n}\leq x_k\dfrac{2n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}1\leq x\leq 2$

$$\begin{aligned}\therefore\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}\right)&=\int_1^2\frac{dx}{1+x}\\&=\left[\log|1+x|\right]_1^2\\&=\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

例題　無限級数から定積分へ

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

ポイント

積形の式ときたら対数

解

$$\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\left(\log\frac{2+x}{1+x}\right)dx$$

$$=\int_0^1\{\log(x+2)-\log(x+1)\}dx$$

$$=\left[(x+2)\log(x+2)-x\right]_0^1-\left[(x+1)\log(x+1)-x\right]_0^1$$

$$=\log\frac{27}{16}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{16}$$

補足

積分は公式 $\int\log(x+a)dx=(x+a)\log(x+a)-x+C$ を使った。